KOMPENDIUM

13. august 2011

FAG/KURS:

MAT001
FORKURS I MATEMATIKK

TITTEL:

Utvalgte grunnleggende emner i matematikk

FAG/KURSANSVARLIG:

Per Kristian Rekdal

FORFATTER(E):

Per Kristian Rekdal

Semester:

H 2011

Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

Avdeling for Økonomi, Informatikk,
Samfunnsfag og Helse og Sosialfag

Forord

Høgskolen i Molde gjennomfører forkurs i matematikk for studenter som har svakt grunnlag i dette faget, eller som ønsker å friske opp "gamle" kunnskaper.

Formål:

Målet med forkurset er å hjelpe studentene til kunne følge undervisningen i det obligatoriske kurset MAT100 Matematikk. Det viser seg at mange studenter har svake forkunnskaper i matematikk. Dette gjør det vanskelig å følge normal studieprogresjon i første studieår. Høgskolen forutsetter at studenter med svak bakgrunn i matematikk deltar ved forkurset i matematikk. Forkurset alene må imidlertid ikke oppfattes som et tilstrekkelig middel til å skaffe seg eventuelle manglende forkunnskaper, men heller som et supplement til nødvendig selvstudium.

Molde, august 2011.

Per Kristian Rekdal

Innhold

1 Grunnleggende emner **4**
- 1.1 Tall og tallsystemer 4
- 1.2 Algebraiske uttrykk 6
- 1.3 Faktorisering 9
- 1.4 Brøkregning 11
  - 1.4.1 Forkorte og utvide brøker 11
  - 1.4.2 Sum av brøker 12
  - 1.4.3 Multiplikasjon og divisjon med brøker 13
- 1.5 Potenser 15
- 1.6 Rotstørrelser 18
- 1.7 1. gradsligning med en ukjent 21
- 1.8 1. gradsligning med to ukjente 24
- 1.9 2. gradsligning med en ukjent 28
- 1.10 Ulikheter 31
- 1.11 Polynomdivisjon 35
- 1.12 Absoluttverdi 39

2 Funksjoner **45**
- 2.1 Parabel 45
- 2.2 Hyperbel 49
- 2.3 Parameterisering 53
- 2.4 Mer om funksjoner 58
- 2.5 Derivasjon 60

Kapittel 1

Grunnleggende emner

1.1 Tall og tallsystemer

Notasjon for tall:

$$N = \{\ 1, 2, 3, 4,\ \dots\ \} \quad \text{(hele tall)} \tag{1.1}$$

$$Z = \{\ \dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,\ \dots\ \} \quad \text{(naturlige tall)} \tag{1.2}$$

$$Q = \{\ \frac{a}{b} \Big|\ a \in Z\ \wedge\ b \in N\ \} \quad \text{(rasjonale tall)} \tag{1.3}$$

$$R = \text{mengden av reelle tall} \quad \text{(alle tall på tall-linja)} \tag{1.4}$$

Mengedesymbol, listeform:

$$M = \{\ 3, 6, 7, 9\ \} \qquad \text{(endelig mengde)} \tag{1.5}$$

Mengden kan være endelig eller uendelig.

Mengedesymbol, intervall:

$$[a,b] \quad = \quad \{ \ x \mid a \leq x \leq b \ \} \qquad \text{(alle reelle tall f.o.m. } a \text{ t.o.m. } b\text{)} \tag{1.6}$$

(<u>lukket</u> intervall)

$$\langle a,b \rangle \quad = \quad \{ \ x \mid a < x < b \ \} \qquad \text{(ingen endepunkt er med)} \tag{1.7}$$

(<u>åpent</u> intervall)

$$\langle a,b] \quad = \quad \{ \ x \mid a < x \leq b \ \} \qquad \text{(bare ene endepunktet er med)} \tag{1.8}$$

(<u>halvåpent</u> intervall)

$$[a,b \rangle \quad = \quad \{ \ x \mid a \leq x < b \ \} \qquad \text{(bare ene endepunktet er med)} \tag{1.9}$$

(<u>halvåpent</u> intervall)

1.2 Algebraiske uttrykk

Generelle regler for algebra: (algebra = bokstavregning)

$$\boxed{\begin{aligned} a + a &= 2a & (1.10)\\ a + b &= b + a & (1.11)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} -(a + b) &= -a - b & (1.12)\\ -(a - b) &= -a + b & (1.13)\end{aligned}}$$

Husk:

- $+$ foran parentes: ingen fortegnsending
- $-$ foran parentes: skifte alle fortegn i parentesen

Ved regning med flerleddete uttrykk:

1)	Samle sammen <u>like ledd</u> ved å summere koeffisientene
2)	<u>Løs opp</u> parenteser

<u>Eksempel</u>: (samle sammen like ledd)

$$\underline{\underline{ab - 3a + b - 5ab + 4b \;=\; -4ab - 3a + 5b}} \qquad (1.14)$$

<u>Eksempel</u>: (løse opp parenteser og samle sammen like ledd)

$$\underline{\underline{(3ab + b) - (ab + 2b + c)}} \;=\; 3ab + b - ab - 2b - c \;=\; \underline{\underline{2ab - b - c}} \qquad (1.15)$$

Parentesregler:

$$\boxed{\begin{aligned} a \cdot (b+c) &= ab + ac && (1.16) \\ (a+b)\cdot(c+d) &= ac + ad \,+\, bc + bd && (1.17) \end{aligned}}$$

hvor lign.(1.17) har følgende spesialtilfeller:

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(1. kvadratsetning)} && (1.18) \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{(2. kvadratsetning)} && (1.19) \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 && \text{(konjugatsetning)} && (1.20) \end{aligned}}$$

hvor konjugatsetningen, dvs. lign.(1.20), forklares via

$$\underline{\underline{(a+b)(a-b)}} = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2 = \underline{\underline{a^2 - b^2}} \tag{1.21}$$

Husk, når man multipliserer ut parenteser:

- $(+)\cdot(+) = +$
- $(+)\cdot(-) = -$
- $(-)\cdot(-) = +$

Husk også:

$$-a = (-1) \cdot a \tag{1.22}$$

$$a - b = a + (-b) \tag{1.23}$$

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{1.24}$$

<u>Eksempel</u>:

$$\underline{\underline{(2xy+x)(4xy-x) - 4x^2(1-y) + x^2}} = 8x^2y^2 - 2x^2y + 4x^2y - \cancel{x^2} - 4x^2 + 4x^2y + \cancel{x^2}$$

$$= \underline{\underline{8x^2y^2 + 6x^2y - 4x^2}} \tag{1.25}$$

<u>*Oppgaver*</u> :

FoMa 1: 100 , 101 , 102

1.3 Faktorisering

Definisjon:

$$\text{Faktorisering} \quad = \quad \text{decomponering av et objekt (f.eks. tall, uttrykk) til andre objekt, eller faktorer.}$$

Dette betyr at et objekt omskrives som et produkt av andre objekt.

Eksempeler: (enkeltstående uttrykk)

$$54 = \overbrace{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{faktorisering\ av\ 54} \tag{1.26}$$

$$\overbrace{6x^2y}^{ledd} = 6\,x\,x\,y \tag{1.27}$$

Eksempeler: (flerleddete uttrykk)

$$ab + ac - ad = a(b + c - d) \tag{1.28}$$

(fellesfaktor a i flerleddete uttrykk)

$$2a^2b - 4ab = 2 \cdot a \cdot a \cdot b - 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot a \cdot b \cdot (a - 2) \tag{1.29}$$

Eksempeler: (kvadratsetningene og konjugatsetning er faktorisering)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2 \qquad \text{(1. kvadratsetning)} \tag{1.30}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b) = (a - b)^2 \qquad \text{(2. kvadratsetning)} \tag{1.31}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \qquad \text{(konjugatsetning)} \tag{1.32}$$

Eksempler:

$$\underline{\underline{4a^2 - 20ab + 25b^2 \; = \; (2a - 5b)^2}} \tag{1.33}$$

$$\underline{\underline{8x^4y^4 - 2}} \; = \; 2(x^4y^4 - 1) \; = \; 2(4x^4y^4 - 1) \; = \; \underline{\underline{2(2x^2y^2 - 1)(2x^2y^2 + 1)}} \tag{1.34}$$

Oppgaver :

FoMa 1: 103

1.4 Brøkregning

Husk:

$$\boxed{\text{Man kan aldri dele på 0.}}$$

1.4.1 Forkorte og utvide brøker

Forkorting av en brøk:

$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b} \qquad \text{(forkorting av en brøk)} \qquad (1.35)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \qquad \text{(utvidelse av en brøk)} \qquad (1.36)$$

hvor den siste ligningen kan forstås via

$$\underline{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \underline{\frac{a \cdot c}{b \cdot c}} \qquad (1.37)$$

siden $1 = \frac{c}{c}$.

Husk: man kan aldri dele på null dvs. $b, c \neq 0$.

<u>Eksempler</u>:

$$\underline{\underline{\frac{10}{6}}} \overset{faktoriser}{=} \frac{\cancel{2} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 3} \overset{forkort}{=} \underline{\underline{\frac{5}{3}}} \qquad (1.38)$$

$$\underline{\underline{\frac{a^2 - ab}{3a - 3b}}} \overset{faktoriser}{=} \frac{a\cancel{(a-b)}}{3\cancel{(a-b)}} \overset{forkort}{=} \underline{\underline{\frac{a}{3}}} \qquad (1.39)$$

1.4.2 Sum av brøker

Sum av brøk med samme nevner:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad (1.40)}$$

<u>Eksempeler:</u> (Ved sum av brøker, utvid hver brøk slik at man får <u>fellesnevner</u>)

$$\underline{\underline{\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}} \stackrel{utvid}{=} \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 6} - \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} \stackrel{fellesnevner}{=} \frac{10}{12} - \frac{6}{12} + \frac{9}{12} \tag{1.41}$$

$$\stackrel{sum}{=} \frac{10 - 6 + 9}{12} = \underline{\underline{\frac{13}{12}}} \tag{1.42}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3ab} - \frac{a}{6b} + \frac{a}{9b}}} \stackrel{utvid}{=} \frac{6}{6 \cdot 3ab} - \frac{3a \cdot a}{3a \cdot 6b} + \frac{2a \cdot a}{2a \cdot 9b} \stackrel{fellesnevner}{=} \frac{6}{18ab} - \frac{3a^2}{18ab} + \frac{2a^2}{18ab} \tag{1.43}$$

$$\stackrel{sum}{=} \frac{6 - 3a^2 + 2a^2}{18ab} = \underline{\underline{\frac{6 - a^2}{18ab}}} \tag{1.44}$$

1.4.3 Multiplikasjon og divisjon med brøker

Regler for multiplikasjon og divisjon med brøker:

$$c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b} \qquad [1] \qquad \text{(Tall multiplisert med brøk)} \tag{1.45}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad [2] \qquad \text{(Brøk multiplisert med brøk)} \tag{1.46}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad [3] \qquad \text{(Brøk dividert med brøk)} \tag{1.47}$$

hvor den siste ligningen, dvs. lign.(1.47), forklares via

$$\underline{\underline{\frac{a}{b} : \frac{c}{d}}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{utvid}{=} \frac{\frac{a}{b} \cdot d}{\frac{c}{\cancel{d}} \cdot \cancel{d}} \overset{regel\ [1]}{=} \frac{\frac{ad}{b}}{c} \overset{utvid}{=} \frac{\frac{ad}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b}}{c \cdot b} = \underline{\underline{\frac{a \cdot d}{b \cdot c}}} \tag{1.48}$$

Nyttige huskeregler i forbindelse med utvidelse:

- det er lov å multiplisere og dele med samme tall (utvidelse)
- det er lov å multiplisere og dele med $1 = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$ (utvidelse)

<u>Noen eksempler</u>:

$$\underline{\underline{2 \cdot \frac{x}{4}}} \overset{regel\ [1]}{=} \frac{2x}{4} \underset{forkort}{\overset{faktoriser}{=}} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{x}{2}}} \tag{1.49}$$

$$\underline{\underline{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}}} \overset{regel\ [2]}{=} \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} \underset{forkort}{\overset{faktoriser}{=}} \underline{\underline{\frac{10}{21}}} \tag{1.50}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{5} : \frac{4}{15}}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{15}} \overset{utvid}{=} \frac{\frac{1}{5} \cdot 15}{\frac{4}{\cancel{15}} \cdot \cancel{15}} \overset{faktoriser}{=} \frac{\frac{1}{\cancel{5}} \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \tag{1.51}$$

Eksempel:

$$\underline{\underline{\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}\right):\left(1-\frac{a-1}{a+1}\right)}} = \left(\frac{a-1}{(a+1)(a-1)}+\frac{a+1}{(a+1)(a-1)}\right):\left(\frac{a+1}{a+1}-\frac{a-1}{a+1}\right) \tag{1.52}$$

$$= \left(\frac{a-1}{a^2-1}+\frac{a+1}{a^2-1}\right):\left(\frac{a+1-(a-1)}{a+1}\right) \tag{1.53}$$

$$= \left(\frac{a-\cancel{1}+(a+\cancel{1})}{a^2-1}\right):\left(\frac{\cancel{a}+1-\cancel{a}+1)}{a+1}\right) \tag{1.54}$$

$$= \frac{2a}{a^2-1}:\frac{2}{a+1} \tag{1.55}$$

$$\overset{regel\ [3]}{=} \frac{2a}{a^2-1}\cdot\frac{a+1}{2} \tag{1.56}$$

$$= \frac{\cancel{2}a}{(a-1)\cancel{(a+1)}}\cdot\frac{\cancel{a+1}}{\cancel{2}} \tag{1.57}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a}{a-1}}} \tag{1.58}$$

Oppgaver :

FoMa 1: 109

1.5 Potenser

Definisjon:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{= n\ faktorer} \tag{1.59}$$

hvor n= eksponent, $n \in N$, a = grunntall og $a \in R$.

Potensregler:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{1.60}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{1.61}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n} \tag{1.62}$$

$$a^0 = 1 \tag{1.63}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{1.64}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n \tag{1.65}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad b \neq 0 \tag{1.66}$$

og i tillegg

$$a^0 = 1 \tag{1.67}$$

$$a^1 = a \tag{1.68}$$

Noen eksempler:

$$\underline{\underline{3^2 \cdot 3^5}} = 3^{2+5} = \underline{\underline{3^7}} \tag{1.69}$$

$$\underline{\underline{(2^{-3})^7}} = 2^{-3\cdot 7} = 2^{-21} = \underline{\underline{\frac{1}{2^{21}}}} \tag{1.70}$$

$$\underline{\underline{\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3}}} \tag{1.71}$$

Standardform og normalform:

$$1\,000 = 10^3 \tag{1.72}$$

$$1\,000\,000 = 10^6 \qquad \text{(en million)} \tag{1.73}$$

$$0,001 = 10^{-3} \qquad \text{(millimeter)} \tag{1.74}$$

$$0,000\,000\,063 = 6,3 \cdot 10^{-8} \tag{1.75}$$

$$\underbrace{452\,000\,000\,000}_{\text{standardfrom}} = \underbrace{4,52 \cdot 10^{11}}_{\text{normalform}} \tag{1.76}$$

Generelt med 10-potens:

$$\boxed{\text{tall} = a \cdot 10^n \qquad (1.77)}$$

hvor $n \in Z$ and $a \in [1, 10\rangle$.

Oppgaver :

FoMa 2: 202 , 203 , 204 , 205 , 206 , 207

1.6 Rotstørrelser

Definisjon av *kvadrat*rot: $\quad (a \geq 0)$ $\qquad$ PS: Man kan IKKE ta kvadratroten av et negativt tall [1].

$$\boxed{\sqrt{a} \;=\; \text{det positive tallet som, opphøyd i 2, er 'a'} \qquad (1.78)}$$

m.a.o. $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a.$ Eksempler:

$$\underline{\underline{\sqrt{9}}} = \sqrt{3^2} = \underline{\underline{3}} \qquad (\text{M.a.o.}: \quad 3^2 = 9) \tag{1.79}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{5}}} = \sqrt{(2.236\ldots)^2} = \underline{\underline{2.236\ldots}} \qquad (\text{M.a.o.}: \quad (2.236\ldots)^2 = 5) \tag{1.80}$$

Regneregler:

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}} \tag{1.81}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \tag{1.82}$$

$$\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad , \quad a, b \geq 0 \tag{1.83}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \tag{1.84}$$

<u>Eksempler</u>:

$$\underline{\underline{\sqrt{9 \cdot 16}}} = \sqrt{9}\,\sqrt{16} = 3 \cdot 4 = \underline{\underline{12}} \tag{1.85}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{\frac{9}{16}}}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \tag{1.86}$$

[1] Komplekse tall er ikke et tema i dette kurset.

Generalisering:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \quad , \quad a \geq 0 \qquad\qquad (1.87)}$$

hvor n = roteksponent, $n \in N$, a = radikand og $a \in R$.

Regneregler:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad (1.88)$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \qquad (1.89)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (1.90)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = = \frac{1}{(a^{\frac{1}{n}})^m} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} \qquad (1.91)$$

hvor lign.(1.89), forklares via $(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}} = a^1 = a.$

Legg merke til at for $n = 2$ i lign.(1.88) og (1.89), så reproduserer man lign.(1.81) og (1.82):

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \qquad (1.92)$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad (1.93)$$

Eksempler:

$$\underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}}}} \overset{utvid}{=} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}} \tag{1.94}$$

$$\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}} \overset{utvid}{=} \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{2}}{3-2} = \underline{\underline{\sqrt{6}-2}} \tag{1.95}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}} \overset{utvid}{=} \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \underline{\underline{2+\sqrt{3}}} \tag{1.96}$$

hvor konjugatsetning lign.(1.20) har blitt brukt i de to siste ligningene.

Oppgaver :

FoMa 2: 213 , 214 , 215 , 216 , 217

1.7 1. gradsligning med en ukjent

En ligning på formen

$$\boxed{ax + b = 0 \qquad (1.97)}$$

kalles en 1. gradsligning. Her er a og b konstanter. Dette er ligninger med

- *en* ukjent
- variabelen x er i 1. potens, dvs. $x = x^1$

Eksempler:

$$x - 4 = 6 + 2x \tag{1.98}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x = -\frac{1}{3} \tag{1.99}$$

Operasjoner: (for å løse 1. gradsligninger (og andre type ligninger))

Addere med samme tall på begge sider

$$\begin{aligned} x - 4 &= 6 + 2x \\ x - 4 + 4 &= 6 + 2x + 4 \end{aligned} \tag{1.100}$$

Subtrahere med samme tall på begge sider

$$\begin{aligned} x - 4 &= 6 + 2x \\ x - 4 - 6 &= 6 + 2x - 6 \end{aligned} \tag{1.101}$$

Multiplisere ($\neq 0$) med samme tall på begge sider

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x &= -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x\right) &= -\frac{4}{3}\,\frac{1}{3} \end{aligned} \tag{1.102}$$

Dividere ($\neq 0$) med samme tall på begge sider

$$\begin{aligned} x - 4 &= 6 + 2x \\ \frac{x - 4}{2} &= \frac{6 + 2x}{2} \end{aligned} \tag{1.103}$$

Eksempel:

$$\frac{2}{3} - (x+7) = -\frac{1}{2}(x+1) - x \tag{1.104}$$

$$\frac{2}{3} \cancel{-x} - 7 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cancel{-x} \qquad \text{(Løs opp parentesene)} \tag{1.105}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 7 \qquad \text{(Samle } x\text{-leddet på venstre side og tallene på høyre)} \tag{1.106}$$

$$\cancel{2} \cdot \frac{x}{\cancel{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 7\right) \qquad \text{(Multipliser begge sider med 2)} \tag{1.107}$$

$$x = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - \frac{2 \cdot 2}{3} + 2 \cdot 7 \tag{1.108}$$

$$x = 1 - \frac{4}{3} + 14 \tag{1.109}$$

$$x = \frac{3}{3} - \frac{4}{3} + \frac{3 \cdot 14}{3} \qquad \text{(Finn fellesnevner på høyre side)} \tag{1.110}$$

$$x = \frac{3 - 4 + 3 \cdot 14}{3} \qquad \text{(Sum av brøker, se Eq. (1.40))} \tag{1.111}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{41}{3}}} \tag{1.112}$$

Eksempel:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5x} = \frac{2}{15}-\frac{7}{30x} \tag{1.113}$$

$$\frac{1}{5x}+\frac{7}{30x} = \frac{2}{15}-\frac{1}{3} \qquad \text{(Samle } x\text{-leddene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{1.114}$$

$$\frac{6}{5x\cdot 6}+\frac{7}{30x} = \frac{2}{15}-\frac{5}{3\cdot 5} \qquad \text{(Fellesnevner på hver side)} \tag{1.115}$$

$$\frac{6}{30x}+\frac{7}{30x} = \frac{2}{15}-\frac{5}{15} \tag{1.116}$$

$$\frac{6+7}{30x} = \frac{2-5}{15} \tag{1.117}$$

$$\frac{13}{30x} = -\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 5} \qquad \text{(Faktorisering og forkorting)} \tag{1.118}$$

$$\cancel{x}\frac{13}{30\cancel{x}} = x(-\frac{1}{5}) \qquad \text{(Multipliser med } x\text{)} \tag{1.119}$$

$$(-5)\,\frac{13}{30} = \cancel{(-5)}(-\cancel{\frac{1}{5}})\,x \qquad \text{(Multipliser med } (-5)\text{)} \tag{1.120}$$

$$(-\cancel{5})\,\frac{13}{6\cdot\cancel{5}} = x \tag{1.121}$$

$$\underline{\underline{-\frac{13}{6} = x}} \tag{1.122}$$

Oppgaver :

FoMa 3: 301 , 302

1.8 1. gradsligning med to ukjente

En ligning på formen

$$\boxed{ax + by = c \qquad (1.123)}$$

kalles en 1. gradsligning med to ukjente, eller en lineær ligning med 2 ukjente. Her er a og b konstanter. Dette er ligninger med

- *to* ukjente
- variabelene x og y er i 1. potens, dvs. $x = x^1$ og $y = y^1$

Eksempler:

$$x + y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 1 \tag{1.124}$$

$$x - 2y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - 2 \tag{1.125}$$

Generelt kan slike ligninger skrives:

$$\boxed{y = a'x + b' \qquad (1.126)}$$

som bare er en alternativ måte å skrive lign.(1.123) på.

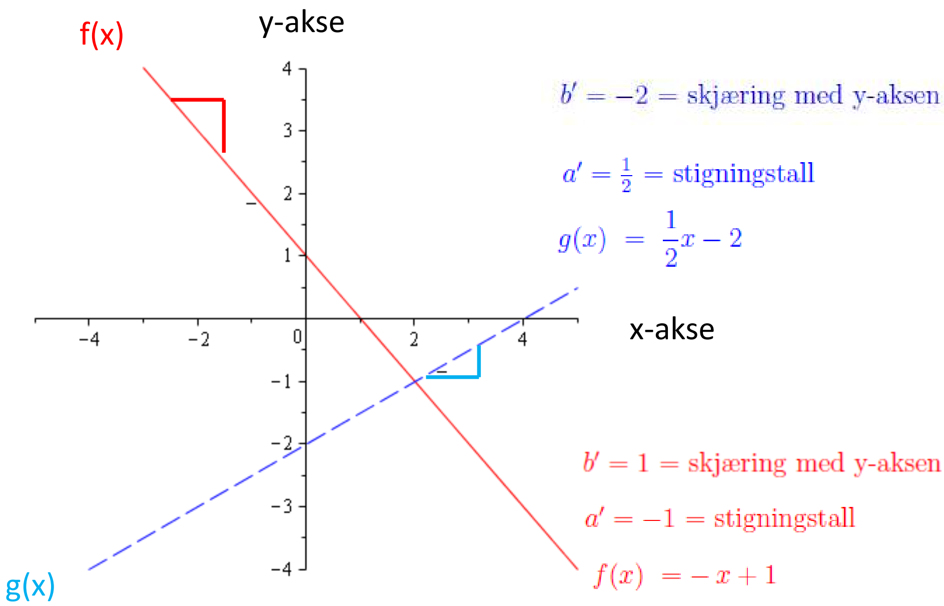
Dette er

- en rett linje
- a' = stigningstall
- b' = skjæring med y-aksen

Førstegradsligninger med to ukjente, dvs. en rett linje, skrives ofte slik:

$$y = -x + 1 \qquad \text{kan skrives} \qquad \underline{f(x) = -x + 1} \tag{1.127}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2 \qquad \text{kan skrives} \qquad \underline{g(x) = \frac{1}{2}x - 2} \tag{1.128}$$



Figur 1.1: Plott av $f(x)$ og $g(x)$.

Å løse ligningen $f(x) = g(x)$ kan gjøres på to måter:

i) Grafisk løsning:

Av figuren ser vi at grafene skjærer hverandre når

$$\underline{\underline{x = 2 \quad , \quad y = -1}} \tag{1.129}$$

ii) Ved regning:

$$f(x) = g(x) \tag{1.130}$$

$$-x+1 = \frac{1}{2}x-2 \tag{1.131}$$

$$-x-\frac{1}{2}x = -1-2 \quad \text{(Samle } x\text{-leddene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{1.132}$$

$$-\frac{2x}{2}-\frac{1}{2}x = -3 \quad \text{(Fellesnevner på hver side)} \tag{1.133}$$

$$-\frac{2x+x}{2} = -3 \tag{1.134}$$

$$-\frac{3x}{2} = -3 \tag{1.135}$$

$$\underline{\underline{x = 2}} \tag{1.136}$$

Dette er den x-verdien hvor grafene $f(x)$ og $g(x)$ skjærer hverandre, (se Fig.(1.1)). Dermed finnes tilhørende y-verdi:

$$\underline{\underline{y}} = f(x=2) \tag{1.137}$$

$$= g(x=2) \tag{1.138}$$

$$= \frac{1}{2}2-2 = 1-2 = \underline{\underline{-1}} \tag{1.139}$$

dvs. samme løsning som den grafiske, som det skal være.

Oppgaver :

FoMa 3: 304 , 305 , 306

1.9 2. gradsligning med en ukjent

En ligning på formen

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1.140)}$$

kalles en 2. gradsligning med en ukjent. Her er a og b konstanter. Dette er ligninger med

- *en* ukjent
- variabelen x er i maksimalt 2. potens, dvs. x^2

Eksempler:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad (1.141)$$

$$2x^2 + 7x = 23 \qquad (1.142)$$

Ved å omskrive lign.(1.140) ved hjelp av 1. kvadratsetning, så kan man vise (se lærebok) at løsningen for en 2. gradsligning er

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1.143)}$$

med andre ord: det er **to** løsninger til en 2. gradsligning med en ukjent.

Eksempel:

La $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Nullpunktene til $f(x)$ finnes ved:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \qquad (1.144) \\ &\Updownarrow \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \qquad (1.145) \end{aligned}$$

Her er $a = 1$, $b = -6$ og $c = 5$. Ved å bruke lign.(1.143), så får vi:

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \quad , \quad x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \qquad (1.146)$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2} \qquad (1.147)$$

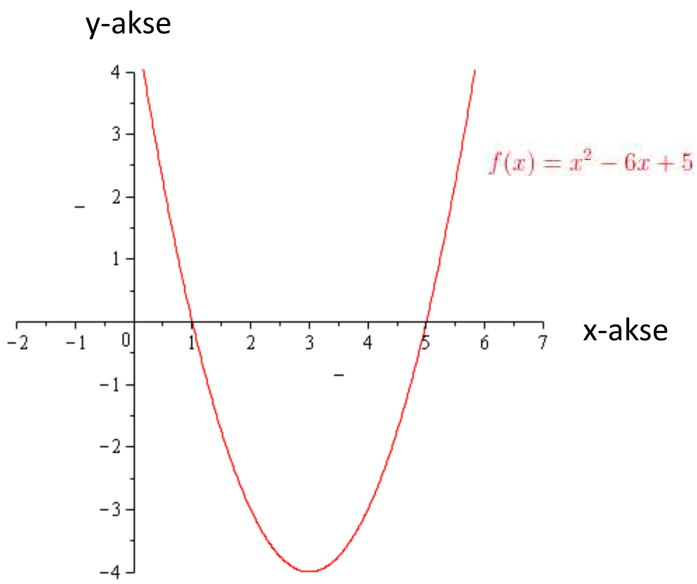
$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} \qquad (1.148)$$

$$x_1 = \frac{6 - 4}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + 4}{2} \qquad (1.149)$$

$$\underline{\underline{x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 5}} \qquad (1.150)$$

Siden $f(x) = 0$ har løsninger, så kan vi faktorisere $f(x)$:

$$\underline{\underline{f(x)}} = x^2 - 6x + 5 = \underline{\underline{(x-1)(x-5)}} \qquad (1.151)$$



Figur 1.2: Plott av $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Oppgaver :

FoMa 4: 401 , 402 , 403 , 404 , 405 , 406

1.10 Ulikheter

Ulikhetstegn:

$$
\begin{aligned}
> &\quad \text{større enn} \\
< &\quad \text{mindre enn}
\end{aligned}
\tag{1.152}
$$

og

$$
\begin{aligned}
\geq &\quad \text{større enn eller lik} \\
\leq &\quad \text{mindre enn eller lik}
\end{aligned}
\tag{1.153}
$$

Operasjoner: (for å løse ulikheter)

Addere med samme tall på begge sider

$$
\begin{aligned}
5 &> 3 \\
5+2 &> 3+2
\end{aligned}
\tag{1.154}
$$

Subtrahere med samme tall på begge sider

$$
\begin{aligned}
5 &> 3 \\
5-2 &> 3-2
\end{aligned}
\tag{1.155}
$$

Multiplisere (> 0) med <u>positivt</u> tall på begge sider

$$
\begin{aligned}
5 &> 3 \\
2 \cdot 5 &> 2 \cdot 3
\end{aligned}
\tag{1.156}
$$

Dividere (> 0) med <u>positivt</u> tall på begge sider

$$
\begin{aligned}
5 &> 3 \\
\frac{5}{2} &> \frac{3}{2}
\end{aligned}
\tag{1.157}
$$

Eksempel:

$$3x + 2 > x + 3 \qquad \text{(Samle } x\text{-leddene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{1.158}$$

$$3x - x > 3 - 2 \tag{1.159}$$

$$2x > 1 \qquad \text{(Divider med 2 to på hver side)} \tag{1.160}$$

$$\underline{\underline{x > \frac{1}{2}}} \tag{1.161}$$

For ulikheter har vi i tillegg følgende regler:

Multiplisere (< 0) med negativt tall, SNU tegnet	$5 > 3$ $(-2) \cdot 5 < (-2) \cdot 3$	(1.162)
Dividere (< 0) med negativt tall, SNU tegnet	$5 > 3$ $\frac{5}{(-2)} < \frac{3}{(-2)}$	(1.163)

Eksempel:

$$-4(x - 2) + 3(x + 4) > 5x - (x - 1) \qquad \text{(Løs opp parentesene)} \tag{1.164}$$

$$-4x + 8 + 3x + 12 > 5x - x + 1 \qquad \text{(Samle } x\text{-leddene på venstre side og tallene på høyre)} \tag{1.165}$$

$$-5x > -19 \tag{1.166}$$

$$\frac{-5x}{-5} < \frac{-19}{-5} \qquad \text{(Dividere med } (-5)\text{, SNU tegnet)} \tag{1.167}$$

$$\underline{\underline{x < \frac{19}{5}}} \tag{1.168}$$

For ulikheter, har vi også følgende regel:

> Aldri gange eller dele med uttrykk som inneholder den ukjente.

Dette fordi vi ikke vet om den ukjente er 0 eller negativ.

Eksempel:

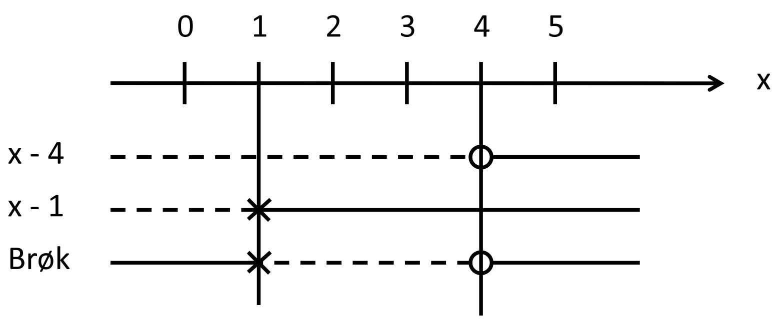
$$\frac{2x-5}{x-1} > 1 \qquad \text{(Kan ikke multiplisere med } (x-1) \text{ siden fortegnet er ukjent)} \tag{1.169}$$

$$\frac{2x-5}{x-1} - 1 > 0 \qquad \text{(Samle alle ledd på samme side)} \tag{1.170}$$

$$\frac{2x-5}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} > 0 \qquad \text{(Fellesnevner)} \tag{1.171}$$

$$\underline{\underline{\frac{x-4}{x-1} > 0}} \tag{1.172}$$

Denne ulikheten løses med et fortegnsskjema/drøftingsskjema:



Figur 1.3: Fortegnsskjema/drøftingsskjema for lign.(1.172).

og løsningen er

$$\underline{\underline{x < 1 \quad \text{eller} \quad x > 4}} \tag{1.173}$$

Oppgaver :

FoMa 4: 409 , 410 , 412 , 413

1.11 Polynomdivisjon

Definisjon:

$$\text{Polynom} \quad = \quad \text{flerleddet uttrykk hvor de ulike leddene har ulik grad.}$$

Eksempeler:

$$p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \tag{1.174}$$

$$f(x) = -7x^3 + x - 17 \tag{1.175}$$

Vanlig talldivisjon:

$$\begin{array}{rl} 756 : 3 & = \ 252 \\ \underline{-6} & \\ 15 & \\ \underline{-15} & \\ 6 & \\ \underline{-6} & \\ 0 & \end{array} \tag{1.176}$$

Kontroll:

$$\underline{252 \cdot 3} \quad = \quad (200 + 50 + 2) \cdot 3 \ = \ 600 + 150 + 6 \ = \ \underline{756} \tag{1.177}$$

m.a.o. det stemmer, og $756 = 252 \cdot 3$ er faktorisert!

Eksempel: (polynomdivisjon)

$$p(x) : (x-2) \tag{1.178}$$

$$\begin{array}{l} (2x^3 - 5x^2 + 3x - 2) : (x-2) \;=\; 2x^2 - x + 1 \\ \underline{-(2x^3 - 4x^2)} \\ \quad -x^2 + 3x \\ \quad \underline{-(-x^2 + 2x)} \\ \qquad x - 2 \\ \qquad \underline{-(x-2)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Kontroll:

$$\underline{(2x^2 - x + 1)\cdot(x-2)} \;=\; 2x^3 - x^2 + x \;-\; 4x^2 + 2x - 2 \;=\; \underline{2x^3 - 5x^2 + 3x - 2} \tag{1.179}$$

m.a.o. det stemmer, og polynomet $p(x)$ kan skrives på den faktoriserte formen

$$\boxed{p(x) \;=\; 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \;=\; \underbrace{(2x^2 - x + 1)(x-2)}_{faktorisert\ form}} \tag{1.180}$$

(Faktoren $2x^2 - x + 1$ kan ikke faktoriseres).

Ut fra denne ligningen ser vi umiddelbart at

$$\boxed{p(2) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(x) : (x-2) \text{ går opp} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ er løsning til } p(x) = 0} \tag{1.181}$$

$x = 2$ er nullpunkt for $p(x)$.

Eksempel: (faktorisering av polynom)

$$g(x) \quad = \quad x^3 - 3x^2 - x + 3 \tag{1.182}$$

Finnes ingen generell formel som løser 3. gradsligninger.
Bruker derfor prøve- og feilemetoden for å finne nullpunktene:

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad g(2) \; = \; 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 + 3 = -3 \;\; \neq \;\; 0 \qquad \text{intet nullpunkt} \tag{1.183}$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad g(1) \; = \; 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = \;\; 0 \qquad \Rightarrow \quad x - 1 \text{ faktor} \tag{1.184}$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad g(-1) \; = \; (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 3 = \;\; 0 \qquad \Rightarrow \quad x + 1 \text{ faktor} \tag{1.185}$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad g(3) \; = \; 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 + 3 = \;\; 0 \qquad \Rightarrow \quad x - 1 \text{ faktor} \tag{1.186}$$

og da vet vi at $g(x)$ kan faktoriseres

$$\boxed{g(x) \quad = \quad x^3 - 3x^2 - x + 3 \quad = \quad \underbrace{(x-1)(x+1)(x-3)}_{faktorisert\ form} \qquad (1.187)}$$

Eksempel: (polynomdivisjon med rest)

$$f(x) : (x-2) \tag{1.188}$$

$$\begin{array}{l} (x^3 - 5x^2 + 2) : (x-2) \; = \; x^2 - 3x - 6 \; - \dfrac{10}{x-2} \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \quad -3x^2 \\ \quad \underline{-(-3x^2 + 6x)} \\ \qquad -6x + 2 \\ \qquad \underline{-(-6x + 12)} \\ \qquad\quad -10 \;\; \text{rest} \end{array}$$

Alt i alt:

$$\underline{\underline{(x^3 - 5x^2 + 2) : (x-2) \;\; = \;\; x^2 - 3x - 6 \; - \frac{10}{x-2}}} \tag{1.189}$$

Her ser vi at divisjonen ikke går opp. Vi har en rest $\frac{10}{x-2}$.

Husk at divisjon kan skrives på følgende måter:

$$\boxed{f(x) : (x-2) \;\; \equiv \;\; \frac{f(x)}{x-2} \qquad (1.190)}$$

Oppgaver :

FoMa 5: 501

1.12 Absoluttverdi

Absoluttverdi:

$$|-3| = 3 \tag{1.191}$$

$$|3| = 3 \tag{1.192}$$

dvs. en absoluttverdi er alltid positiv (eller 0).

Generelt:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & , \text{ når } a \geq 0 \\ -a & , \text{ når } a < 0 \end{cases} \qquad (1.193)}$$

Eksempler:

$$\sqrt{3^2} = 3 \tag{1.194}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = 3 \tag{1.195}$$

Dette gjelder også mer generelt:

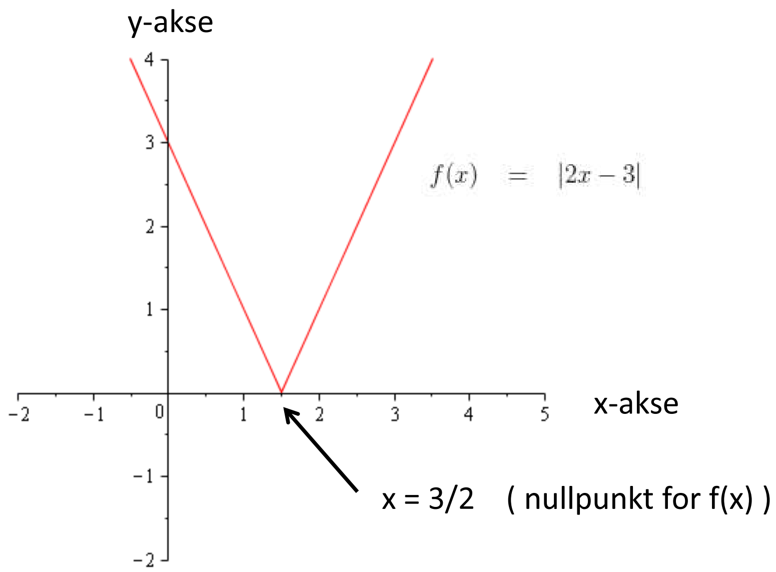
$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \qquad (1.196)}$$

uansett om x er positiv eller negativ.

Eksempel:

Siden $f(x) = |2x - 3| = 0$ for $x = \frac{3}{2}$, så må vi skille mellom når $x \geq \frac{3}{2}$ og $x < \frac{3}{2}$:

$$f(x) \quad = \quad |2x-3| \quad = \begin{cases} 2x-3 & , \quad \text{når } x \ \geq \ \frac{3}{2} \\ -(2x-3) & , \quad \text{når } x \ < \ \frac{3}{2} \end{cases} \tag{1.197}$$



Figur 1.4: Plott av $f(x) = |2x - 3|$.

Eksempel:

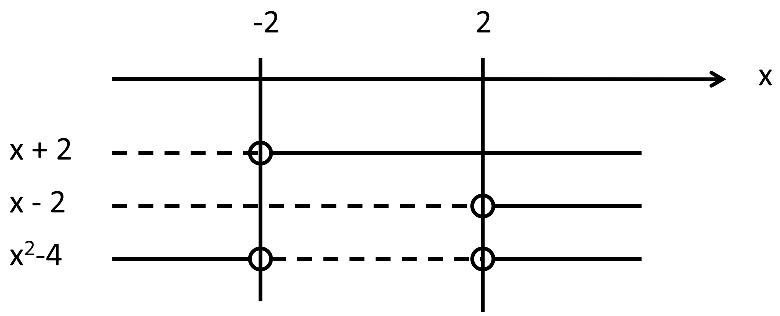
La oss se på

$$g(x) \quad = \quad |x^2 - 4| + 2x + 1 \tag{1.198}$$

og la oss løse ligningen

$$g(x) \;=\; 0 \tag{1.199}$$

Vi må da først se på leddet $(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$:



Figur 1.5: Fortegnsskjema/drøftingsskjema for $x^2 - 4$.

Dvs. vi må splitte $|x^2 - 4|$ i 3 intervall:

$$|x^2 - 4| \quad = \quad \begin{cases} x^2 - 4 & , \quad \text{når} \;\; x \;\geq\; 2 \\ -(x^2 - 4) & , \quad \text{når} \;\; -2 < x < \;2 \\ x^2 - 4 & , \quad \text{når} \;\; x \leq -2 \end{cases} \tag{1.200}$$

Legg merke til at intervallene $x \leq -2$ og $x \geq 2$ gir samme uttrykk, se lign.(1.200).

i) $\underline{x \leq -2 \text{ og } x \geq 2}$:

$$g(x) = 0 \tag{1.201}$$

$$x^2 - 4 + 2x + 1 = 0 \tag{1.202}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \tag{1.203}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \tag{1.204}$$

$$\cancel{x = 1} \quad \vee \quad \underline{x = -3} \tag{1.205}$$

ii) $\underline{-2 < x < 2}$:

$$g(x) = 0 \tag{1.206}$$

$$-(x^2 - 4) + 2x + 1 = 0 \tag{1.207}$$

$$-x^2 + 2x - 5 = 0 \tag{1.208}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{-2} \tag{1.209}$$

$$\cancel{x = 1 + \sqrt{6}} \quad \vee \quad \underline{x = 1 - \sqrt{6}} \tag{1.210}$$

Alt i alt:

$$\underline{\underline{\mathcal{L} = \{ 1 - \sqrt{6} \ , \ -3 \}}} \tag{1.211}$$

Eksempel:

La oss se på

$$h(x) = |2x+4| - 6 \tag{1.212}$$

og la oss løse ligningen

$$h(x) \geq 0 \tag{1.213}$$

Vi må da først se på leddet $|2x+4|$. Her er det lett å se at vi må splitte intervallet i $x \geq -2$ og $x < -2$, så vi trenger ikke noe fortegnsskjema. Vi kan skrive:

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4 & , \text{ når } x \geq 2 \\ -(2x+4) & , \text{ når } x < -2 \end{cases} \tag{1.214}$$

i) $\underline{x \geq -2}$:

$$h(x) \geq 0 \tag{1.215}$$

$$2x+4-6 \geq 0 \tag{1.216}$$

$$2x \geq 6-4 \tag{1.217}$$

$$\underline{x \geq 1} \qquad \text{OK} \tag{1.218}$$

ii) $\underline{x < -2}$:

$$h(x) \geq 0 \tag{1.219}$$

$$-(2x+4) - 6 \geq 0 \tag{1.220}$$

$$-2x - 4 - 6 \geq 0 \tag{1.221}$$

$$-2x \geq 10 \tag{1.222}$$

$$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{10}{-2} \quad , \quad \text{SNU tegnet} \tag{1.223}$$

$$\underline{x \leq -5} \tag{1.224}$$

Alt i alt:

$$\underline{\underline{\mathcal{L} = \langle -\infty, -5] \quad \cup \quad [1, \infty\rangle}} \tag{1.225}$$

Oppgaver :

FoMa 5: 503 , 504

Kapittel 2

Funksjoner

2.1 Parabel

En ligning på formen

$$\boxed{f(x) \;=\; ax^2 + bx + c \qquad (2.1)}$$

kalles en parabel. Her er a, b og c konstanter. Dette er ligninger med

- *en* ukjent
- generelt er variabelen x er i 2. og 1 potens, dvs. $x = x^2$ og $x = x^1$

<u>Eksempler på parabler:</u>

$$f(x) = x^2 - x - 2 \tag{2.2}$$

$$g(x) = x^2 \tag{2.3}$$

$$h(x) = -3x^2 + 8 \tag{2.4}$$

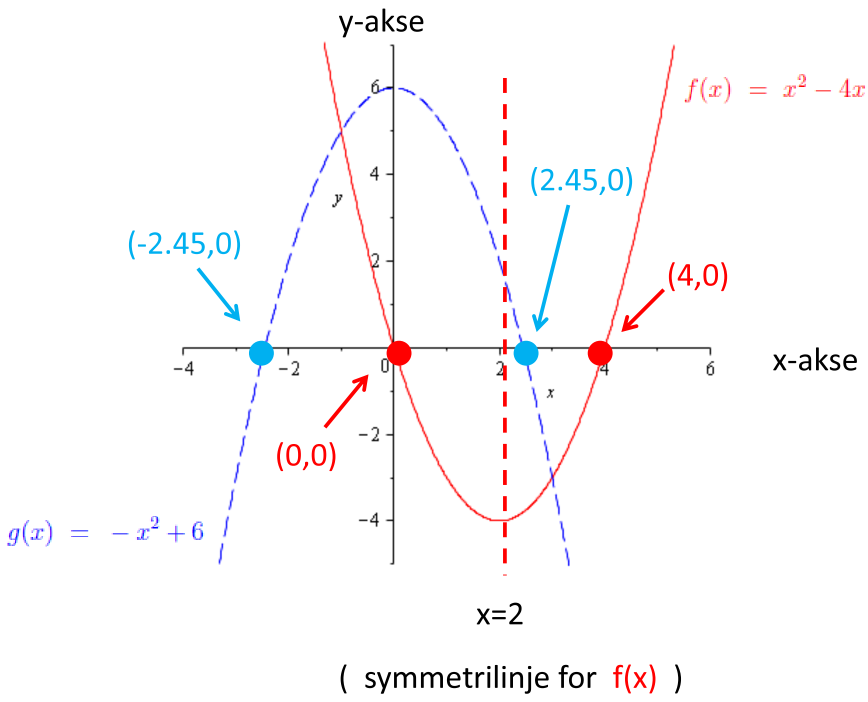
$$i(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x - 2 \tag{2.5}$$

Eksempel: (parabel)

$$f(x) = x^2 - 4x \tag{2.6}$$

$$g(x) = -x^2 + 6 \tag{2.7}$$

- grafene er parabeler
- symmetri gjennomtopp/ bunnpunktet (se figur)
- $f(x)$ er hul opp pga. $+x^2$
- $g(x)$ er hul ned pga. $-x^2$



Figur 2.1: Plott av parabelene $f(x) = x^2 - 4x$ og $g(x) = -x^2 + 6$.

i) Nullpunkt:

Nullpunktene bestemt av $f(x) = 0$ og $f(x) = 0$ kan finnes ved grafisk løsning:

$$f(x) \;=\; 0 \;: \qquad \underline{\underline{x \;=\; 0 \;\text{ og }\; x \;=\; 4}} \tag{2.8}$$

$$g(x) \;=\; 0 \;: \qquad \underline{\underline{x \;=\; -2.45 \;\text{ og }\; x \;=\; 2.45}} \tag{2.9}$$

eller ved regning (løsning av 2. gradsligning)

$$f(x) \;=\; 0: \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 0 \;\text{ og }\; x = 4}} \tag{2.10}$$

$$g(x) \;=\; 0: \quad x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{\mp 2\sqrt{6}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -\sqrt{6} \;\text{ og }\; x = \sqrt{6}}} \tag{2.11}$$

hvor $\sqrt{6} \approx 2.45$.

ii) Skjæringspunkt $f(x) = g(x)$:

Skjæringspunktene $f(x) = g(x)$ kan finnes ved grafisk løsning:

$$f(x) \;=\; g(x) \;: \qquad \underline{\underline{x = -1 \;\text{ og }\; y = 5}} \quad , \quad \underline{\underline{x = 3 \;\text{ og }\; y = -3}} \tag{2.12}$$

eller ved <u>regning</u> (løsning av 2. gradsligning)

$$f(x) = g(x) \tag{2.13}$$

$$x^2 - 4x = -x^2 + 6 \tag{2.14}$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \tag{2.15}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 8}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{x = -1 \;\text{ og }\; x = 3} \tag{2.16}$$

med tilhørende y-verdier

$$\underline{f(-1)} = g(-1) = -(-1)^2 + 6 = \underline{5} \tag{2.17}$$

$$\underline{f(3)} = g(3) = -3^2 + 6 = \underline{-3} \tag{2.18}$$

Alt i alt:

$$\underline{\underline{x = -1 \quad \text{og} \quad y = 5}} \quad , \quad \underline{\underline{x = 3 \quad \text{og} \quad y = -3}} \tag{2.19}$$

Oppgaver :

FoMa 6: 601 , 602

2.2 Hyperbel

En ligning på formen

$$\boxed{f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (2.20)}$$

kalles en hyperbel. Her er a, b, c og d konstanter. Dette er ligninger med

- *en* ukjent
- variabelen x kan være både i teller og nevner
- vertikal asymptote: $cx + d = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = -\frac{d}{c}}$
- horisontal asymptote: $\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} \quad \Rightarrow \quad \underline{y = \frac{a}{c}}$

Eksempler på hyperbler:

$$f(x) = \frac{4}{x} \tag{2.21}$$

$$g(x) = -\frac{3}{x} + 1 \tag{2.22}$$

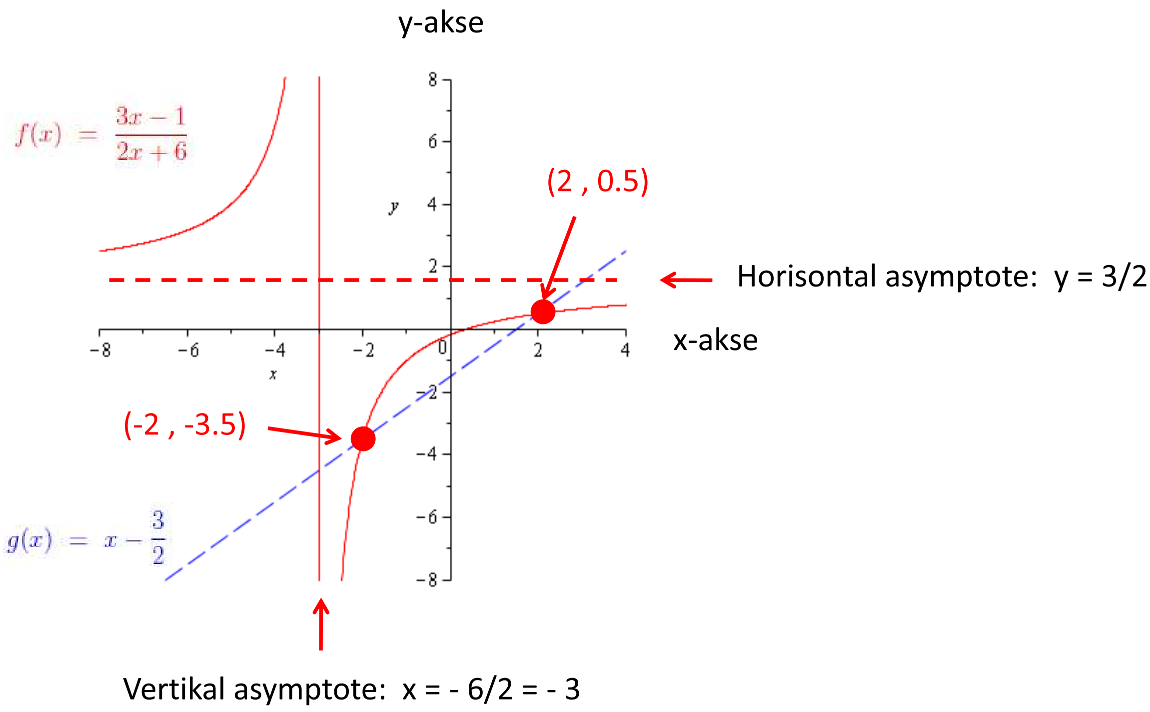
$$h(x) = \frac{x+2}{x+3} \tag{2.23}$$

$$i(x) = \frac{2x+1}{2-x} \tag{2.24}$$

Eksempel: (hyperbel)

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x+6} \tag{2.25}$$

La oss plotte hyperbelen $f(x)$. La oss også løse $f(x) = g(x)$ grafisk, hvor $g(x)$ er den lineære funksjonen $g(x) = x - \frac{3}{2}$.



Figur 2.2: Plott av parabelen $f(x) = \frac{3x-1}{2x+6}$. Den lineære funksjonen $g(x) = x - \frac{3}{2}$ er også plottet.

i) Nullpunkt:

Nullpunktet bestemt av $f(x) = 0$ kan finnes ved grafisk løsning:

$$f(x) = 0: \qquad \underline{\underline{x = 0.33}} \tag{2.26}$$

$$g(x) = 0: \qquad \underline{\underline{x = 1.5}} \tag{2.27}$$

eller ved regning

$$f(x) = 0: \qquad 3x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{3}}} \tag{2.28}$$

$$g(x) = 0: \qquad x - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}} \tag{2.29}$$

ii) <u>Skjæringspunkt $f(x) = g(x)$</u>:

Skjæringspunktene $f(x) = g(x)$ kan finnes ved <u>grafisk</u> løsning:

$$f(x) \;=\; g(x) \;:\qquad \underline{\underline{x = -2 \quad \text{og} \quad y = -3.5}} \quad , \quad \underline{\underline{x = 2 \quad \text{og} \quad y = 0.5}} \tag{2.30}$$

eller ved <u>regning</u> (løsning av 2. gradsligning)

$$f(x) \;=\; g(x) \tag{2.31}$$

$$\frac{3x-1}{2x+6} \;=\; x - \frac{3}{2} \tag{2.32}$$

$$\frac{3x-1}{2x+6} \;=\; x\,\frac{2x+6}{2x+6} - \frac{3}{2}\frac{x+3}{x+3} \qquad \text{(Fellesnevner)} \tag{2.33}$$

$$\frac{3x-1-x(2x+6)+3(x+3)}{2x+6} \;=\; 0 \qquad \text{(Samle uttrykkene på venstre side)} \tag{2.34}$$

$$\frac{\cancel{3x}-1-2x^2\cancel{-6x}+\cancel{3x}+9}{2x+6} \;=\; 0 \tag{2.35}$$

$$-2x^2+8 \;=\; 0 \tag{2.36}$$

$$x^2 \;=\; 4 \tag{2.37}$$

$$\underline{x = -2 \quad \vee \quad x = 2} \tag{2.38}$$

med tilhørende y-verdier

$$\underline{f(-2)} \;=\; g(-2) \;=\; -2 - \frac{3}{2} \;=\; -\frac{2\cdot 2}{2} - \frac{3}{2} \;=\; -\frac{4+3}{2} \;=\; -\frac{7}{2} \tag{2.39}$$

$$\underline{f(2)} \;=\; g(2) \;=\; 2 - \frac{3}{2} \;=\; \frac{2\cdot 2}{2} - \frac{3}{2} \;=\; \frac{4-3}{2} \;=\; \underline{-\frac{1}{2}} \tag{2.40}$$

Alt i alt:

$$\underline{\underline{x = -2 \quad \text{og} \quad y = -\frac{7}{2}}} \quad , \quad \underline{\underline{x = 2 \quad \text{og} \quad y = -\frac{1}{2}}} \tag{2.41}$$

Oppgaver :

FoMa 6: 605 , 606 , 607

2.3 Parameterisering

Definisjon:

$$\boxed{\text{parameterisering} \;=\; \text{det at en ligning eller uttrykk har en bokstav som betraktes som en konstant eller en kjent størrelse}}$$

Eksempler på parameterisering: (a = parameter)

$$f(x) = 2x + ax - 3 \tag{2.42}$$

$$ax^2 - 5 = 3(x-7) \tag{2.43}$$

$$g(x) = x^2 + ax - \frac{2x+1}{2-x} \tag{2.44}$$

Eksempel: (1. gradsligning med parameter a)

$$3a - ax - 4ax = -5x - 2a \tag{2.45}$$

$$5x - ax - 4ax = -2a - 3a \qquad \text{(Samle } x\text{-uttrykkene på venstre side)} \tag{2.46}$$

$$5(1-a)x = -5a \qquad \text{(Divider med } 5(1-a) \text{ på begge sider)} \tag{2.47}$$

$$\underline{x = -\frac{a}{1-a}} \quad , \qquad a \neq 1 \tag{2.48}$$

Alt i alt:

$$x = \begin{cases} -\frac{a}{1-a} & , \quad a \in R \setminus \{1\} \qquad \text{(en løsning)} \\ \varnothing & , \quad \text{når } a = 1 \qquad \text{(ingen løsning)} \end{cases} \tag{2.49}$$

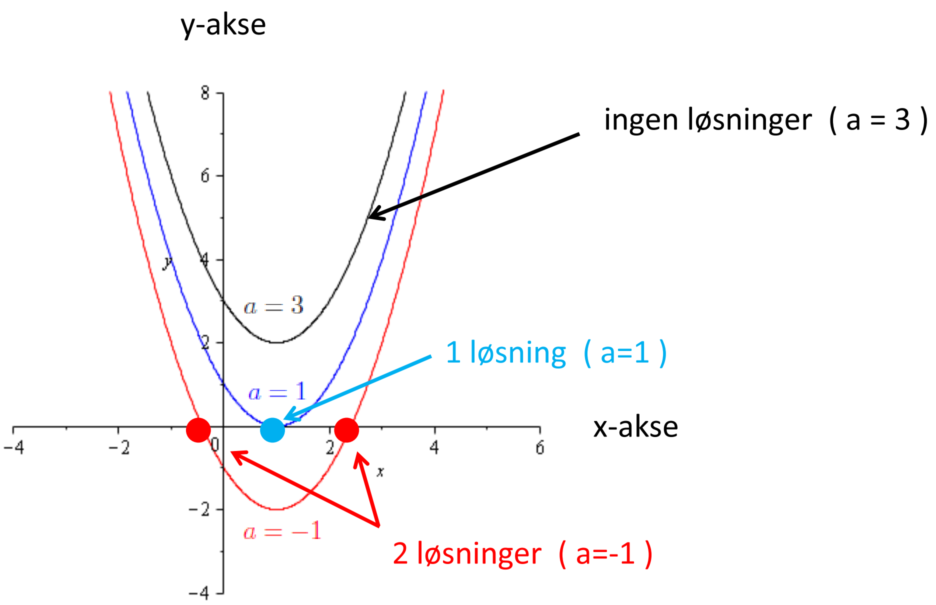
Eksempel: (2. gradsligning med parameter a)

$$x^2 - 2x + a \;=\; 0 \tag{2.50}$$

$$\underline{x} \;=\; \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a}}{2 \cdot 1} \;=\; \frac{2 \pm \sqrt{4(1-a)}}{2} \;=\; \underline{1 \pm \sqrt{1-a}} \tag{2.51}$$

Vi må skille mellom $a = 1$, $a < 1$ og $a > 1$:

$$x \;=\; \begin{cases} 1 & , \quad \text{når} \quad a \;=\; 1 \qquad \text{(kun en løsning)} \\ 1 \pm \sqrt{1-a} & , \quad \text{når} \quad a \;<\; 1 \qquad \text{(to løsninger)} \\ \varnothing & , \quad \text{når} \quad a \;>\; 1 \qquad \text{(ingen løsning)} \end{cases} \tag{2.52}$$



Figur 2.3: Plott av parabelen $f(x) = x^2 - 2x + a$ for $a = -1$, $a = 1$ and $a = 3$.

Eksempel: (2. gradsligning med parameter a)

$$\frac{x+2}{x-2} = -x+a \tag{2.53}$$

Løser denne algebraisk: (dvs. ved regning)

$$\frac{x+2}{x-2} = -x+a \qquad \text{(Multipliser med } x-2\text{)} \tag{2.54}$$

$$x+2 = (-x+a)(x-2) \tag{2.55}$$

$$x+2 = -x^2+2x+ax-2a \tag{2.56}$$

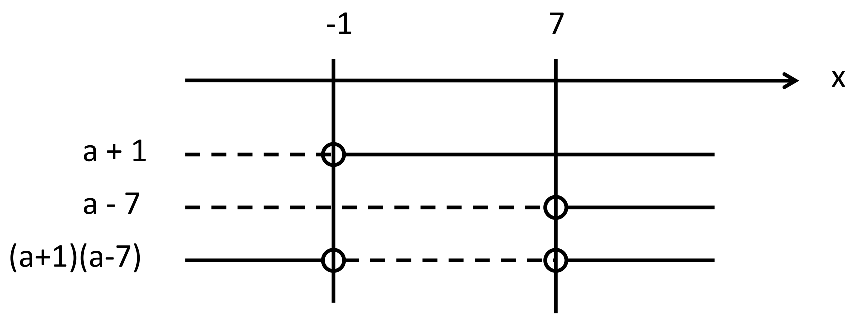
$$x^2-2x-ax+2a+x+2 = 0 \qquad \text{(Samle uttrykkene på venstre side)} \tag{2.57}$$

$$x^2-(a+1)x+2(a+1) = 0 \tag{2.58}$$

Dette er en 2. gradsligning:

$$\underline{x} = \frac{-[-(1+a)] \pm \sqrt{[-(a+1)]^2 - 4\cdot 1\cdot 2(a+1)}}{2\cdot 1} \tag{2.59}$$

$$= \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 8(a+1)}}{2} = \underline{\frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)(a-7)}}{2}} \tag{2.60}$$

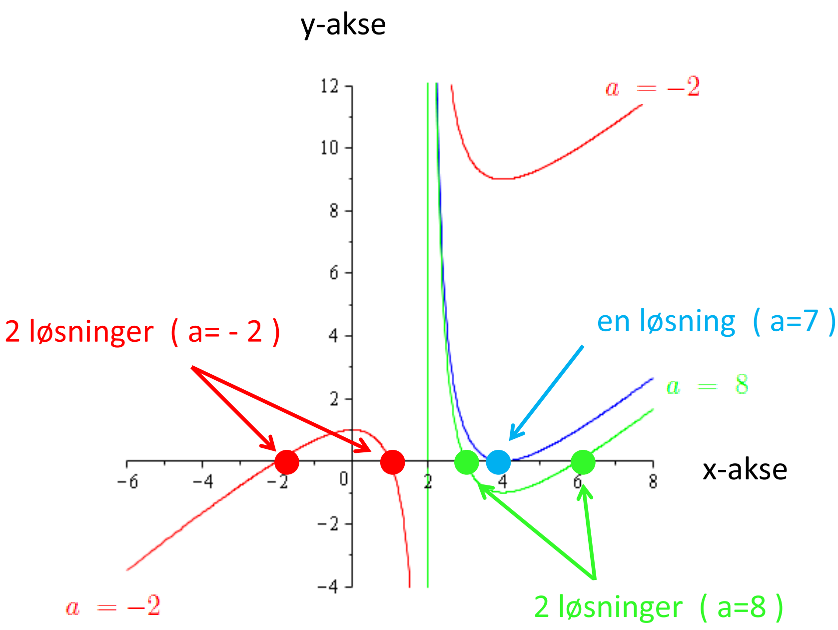


Figur 2.4: Fortegnsskjema/drøftingsskjema for $(a+1)(a-7)$.

Vi må skulle mellom følgende tilfeller:

$$x = \begin{cases} \frac{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)(a-7)}}{2} & , \quad \text{når} \quad a < -1 \quad \vee \quad a > 7 & \text{(to løsninger)} \\ 0 & , \quad \text{når} \quad a = -1 & \text{(kun en løsning)} \\ 4 & , \quad \text{når} \quad a = 7 & \text{(kun en løsning)} \\ \varnothing & , \quad \text{når} \quad -1 < a < 7 & \text{(ingen løsning)} \end{cases} \tag{2.61}$$

La oss plotte $f(x) = \frac{x+2}{x-2} + x - a$. Løsningen av lign.(2.53) tilsvarer $f(x) = 0$:



Figur 2.5: Plott av funksjonen $f(x) = \frac{x+2}{x-2} + x - a$ for $a = -2$, $a = 7$ and $a = 8$.

Oppgaver :

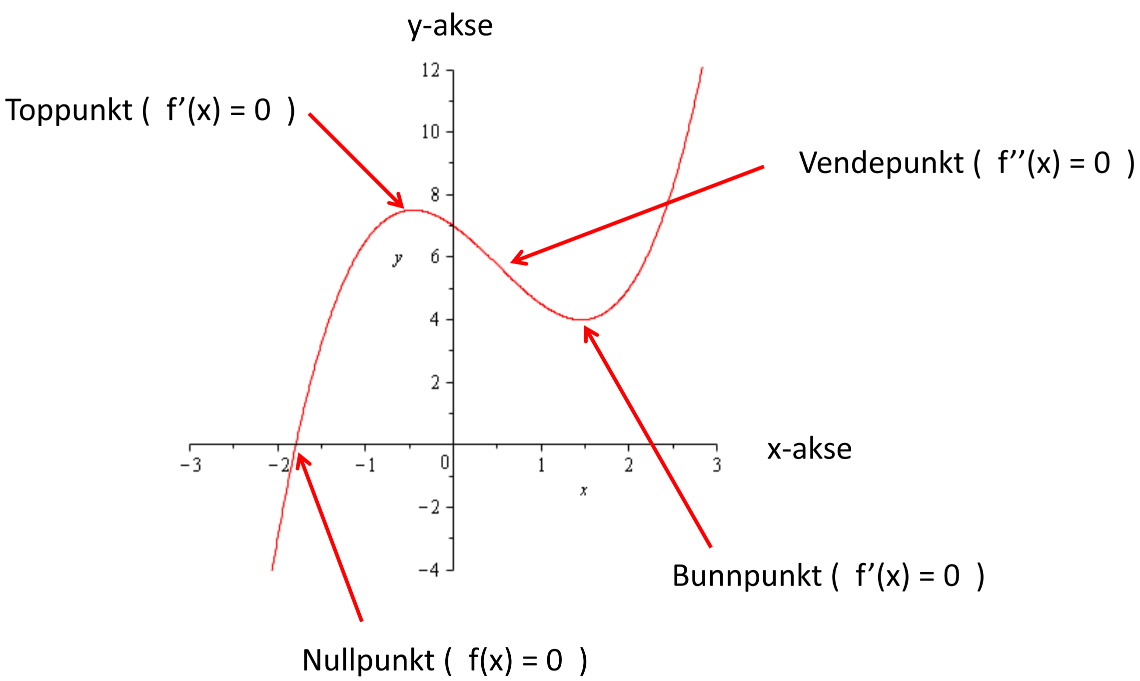
FoMa 7: 701 , 703 , 704

2.4 Mer om funksjoner

La oss se på funksjonen

$$\boxed{f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7 \qquad (2.62)}$$

(Dette er en 3. gradsligning med en ukjent).



Figur 2.6: Plott av $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 7$.

i) Nullpunkt:

$$f(x) = 0: \qquad \text{Skjæring med } x\text{-aksen} \qquad (2.63)$$

ii) Over/under x-aksen:

$$f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{grafen ligger over } x\text{-aksen.} \tag{2.64}$$

$$f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{grafen ligger under } x\text{-aksen.} \tag{2.65}$$

iii) Topp/bunnpunkt:

$$f'(x) = 0 \text{ og } f'(x) \text{ går fra } + \text{ til } - \quad \Rightarrow \quad \text{Toppunkt} \tag{2.66}$$

$$f'(x) = 0 \text{ og } f'(x) \text{ går fra } - \text{ til } + \quad \Rightarrow \quad \text{Bunnpunkt} \tag{2.67}$$

iv) Vendepunkt:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Vendepunkt} \tag{2.68}$$

v) Konstantledd:

$$f(x = 0) = 7 \quad \Rightarrow \quad \text{skjæring med } y\text{-aksen.} \tag{2.69}$$

vi) Asymptoter:

I tillegg kan man undersøke om aspymptoter eksisterer:

- vertikal asymptote(r)
- horisontal asymptote(r)

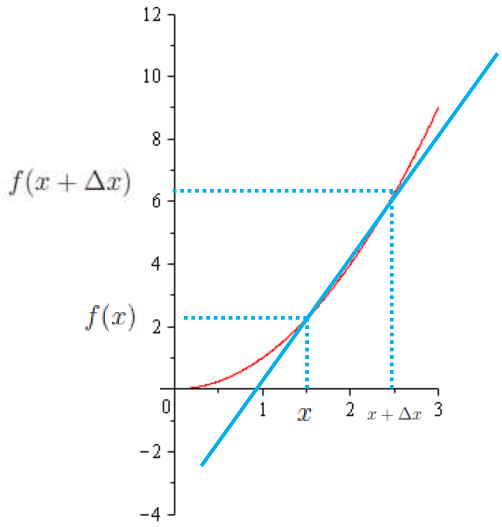
2.5 Derivasjon

Definisjon:

$$\boxed{\text{deriverte} \;=\; \text{stigningstallet til en funksjon}}$$

Definisjon: (teknisk)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.70}$$



Figur 2.7: Deriverte av $f(x)$.

Derivasjonsregler:

$$f(x) = ax^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot ax^{n-1} \quad , \quad n \in R \tag{2.71}$$

$$f(x) = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'v + uv' \tag{2.72}$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{uv' - uv'}{v^2} \tag{2.73}$$

Takk

Takk til Magne Geir Skrede, lektor ved Molde videregående skole, for god hjelp og diskusjoner under utarbeidelsen av dette kompendiet.